

## **Программа вступительного испытания по математике**

### **Порядок проведения вступительного испытания, критерии оценки результатов вступительного испытания**

Вступительное испытание по математике проводится в *электронной* или *письменной* форме.

Задание состоит из 10 вопросов.

Критерии оценки: каждый правильный ответ оценивается в 10 баллов, в сумме абитуриент максимально может набрать 100 баллов.

На выполнение теста отводится 60 минут.

Оценивание ответов:

Неполный или неверный ответ, отсутствие ответа – 0 баллов,

Верный ответ: 10 баллов.

## **Программа вступительного испытания**

Настоящая программа сформирована на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования и соответствует уровню сложности ЕГЭ по математике.

**Основные темы**, по которым составляются задачи экзаменационных тестов, приведены ниже:

### **1. Тождественные преобразования алгебраических выражений.**

Действительные числа.

Действия над действительными числами. Порядок выполнения действий.

Формулы сокращенного умножения.

### **2. Элементарные алгебраические функции и уравнения.**

Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функциональных зависимостей.

Линейная функция. Линейное уравнение и система уравнений.

Квадратичная функция. Квадратное уравнение и системы уравнений второй степени.

Иррациональные уравнения.

Показательная функция и показательные уравнения.

Логарифмическая функция и логарифмические уравнения.

### **3. Неравенства и системы неравенств.**

Рациональные неравенства.

Иррациональные неравенства.

Неравенства с модулем.

Квадратичные, показательные и логарифмические неравенства.

### **4. Тригонометрические функции и уравнения.**

Тригонометрические функции.

Соотношения между тригонометрическими функциями.

Формулы сложения, кратных и половинных аргументов.

Формулы преобразования сумм в произведения и произведений в суммы.

Понятие об обратных тригонометрических функциях.

Тригонометрические уравнения и неравенства.

### **5. Прогрессии, суммы, бесконечные дроби и иррациональности.**

Арифметическая прогрессия.

Геометрическая прогрессия.

Вычисление сумм бесконечного числа слагаемых, бесконечных дробей и других выражений.

### **6. Текстовые задачи.**

Несмотря на то, что на письменном экзамене абитуриент «не отвечает» на теоретические вопросы, положения теории не должны игнорироваться при подготовке к экзамену. Имеется множество примеров, когда пробелы в теории являлись источником ошибок при решении задач. Следует также понимать, что никакое пособие не может охватить всех стандартных и нестандартных приемов решения задач. От абитуриента требуется не только знание стандартных приемов, но и некоторая смекалка при решении задач, которая достигается только практикой.

#### **6. Задачи по планиметрии.**

#### **7. Задачи по стереометрии.**

## **Литература**

1. Под ред. В.М. Говорова, Н.В. Мирошина. Математика. Сборник задач с решениями для поступающих в ВУЗы. АСТ, апрель, Москва, 2002.

2. Сергеев И. Н. Математика. Задачи с ответами и решениями. – М: КДУ: Высшая школа, 2003.

3. 2500 задач по математике с решениями. Под ред. Сканави М. И. – М. ООО «Издательский дом «Оникс 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003г.

4. Шахно К.У. Сборник задач по математике повышенной трудности. Изд. «Высшая школа» ГК СМ БССР по печати. Минск, 1964.
5. Сканапи М. И. Полный сборник решений задач для поступающих в ВУЗы. «Издательство «Мир и Образование», Минск.: ООО «Харвест», 2003, кн.1, кн.2.
6. Черкасов О., Якушев А. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену (скорая помощь абитуриентам). – Москва: «Айрис Пресс», 2003.
7. Письменный Д. Т. Готовимся к экзамену по математике. – 8-е изд. – М.: «Айрис Пресс», 2003.
8. Моденов В. П. Математика: Пособие для поступающих в Вузы. – М.: ООО «Издательство Новая Волна», 2002.
9. Нараленков М. И. Вступительный экзамен по математике. Алгебра. Как решать задачи. Изд-во «Экзамен» Москва, 2003.

<http://www.ege.edu.ru/ru/classes-11/preparation/demovers/>

<http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege>

### 3. Примеры заданий в экзаменационных тестах прошлых лет.

**3.1. Задание.** Вычислить  $\left(9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$  и записать полученное значение в лист ответов.

Ответ:  $\frac{9}{2}$ .

**3.2. Задание.** Вычислить  $\log_2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$  и записать полученное значение в лист ответов.

Ответ: -1.

**3.3. Задание** Упростить выражение.

$\left(\frac{c^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}} - \frac{c^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}}}{c + d}\right) : \left(\frac{(cd)^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{4}{3}}}{2}\right)^{-1} + 1$  и записать полученное выражение в лист

ответов.

**Решение.**

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}} - \frac{c^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}}}{c + d}\right) : \left(\frac{(cd)^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{4}{3}}}{2}\right)^{-1} + 1 = \\ & \left(\frac{\frac{c^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{1}{3}}}{\left(c^{\frac{1}{3}} - d^{\frac{1}{3}}\right)\left(c^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{1}{3}}\right)} - \frac{c^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}}}{\left(c^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(d^{\frac{1}{3}}\right)^3}}{\frac{d^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}\right)}{2}}\right) + 1 = \\ & \left(\frac{1}{c^{\frac{1}{3}} - d^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{c^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{1}{3}}}\right) \frac{d^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}\right)}{2} + 1 = \frac{2d^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}} \frac{d^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}\right)}{2} + 1 = d + 1 \end{aligned}$$

Ответ:  $d+1$ .

**3.4. Задание.** Упростить выражение

$$\frac{4}{a^6} \left(81^{1+\log_3 a} - 5 \cdot 4^{2+4\log_4 a}\right) 5^{\frac{2}{\log_a 5}}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

и записать

полученное значение в лист ответов.

**Решение.**

$$\begin{aligned} & \frac{4}{a^6} \left( 81^{1+\log_3 a} - 5 \cdot 4^{2+4\log_4 a} \right) 5^{\frac{2}{\log_a 5}} = \\ & \frac{4}{a^6} \left( 81 \cdot 81^{\log_3 a} - 5 \cdot 4^2 4^{4\log_4 a} \right) 5^{2\log_5 a} = \\ & \frac{4}{a^6} \left( 81 \cdot (3)^{\log_3 a^4} - 5 \cdot 4^2 4^{\log_4 a^4} \right) 5^{\log_5 a^2} = \\ & \frac{4}{a^6} \left( 81 \cdot a^4 - 5 \cdot 16a^4 \right) a^2 = 4 \end{aligned}$$

Ответ: 4.

**3.5. Задание.** Решить неравенство  $\log_{\frac{x+9}{x-5}}(x+1) > 1$  и записать номер правильного ответа в лист

ответов. Ответы:  $x \in$

1	2	3	4	5	6	7	8
$(5; \infty)$	$(-1; 7)$	$(7; 9)$	$(7; \infty)$	$(5; 7)$	$(9; \infty)$	$(-9; 5)$	$(-9; 5) \cup (7; \infty)$

**Решение.** Рассмотрим два случая: Основание логарифма  $a > 1$  и  $0 < a < 1$ .

Имеем совокупность систем неравенств:

$$\left[ \begin{cases} \frac{x+9}{x-5} > 1 \\ x+1 > \frac{x+9}{x-5} \\ 0 < \frac{x+9}{x-5} < 1 \\ 0 < x+1 < \frac{x+9}{x-5} \end{cases} \right.$$

В каждой системе второе неравенство написано для удовлетворения исходного неравенства. Его быстрое написание возможно, если смотреть на графики логарифмической функции соответственно при  $a > 1$  и  $0 < a < 1$ . Будем решать эти системы по отдельности.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+9}{x-5} > 1 \\ x+1 > \frac{x+9}{x-5} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 5 \\ x+9 > x-5 \\ (x+1)(x-5) > x+9 \\ x < 5 \\ x+9 < x-5 \\ (x+1)(x-5) < x+9 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 5 \\ x^2 - 3x - 14 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 5 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (7; \infty) \end{array} \right. \Rightarrow x \in (7; \infty)$$

Здесь вторая система несовместна, так как  $x+9 < x-5$  никогда не выполняется. Теперь

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{x+9}{x-5} < 1 \\ 0 < x+1 < \frac{x+9}{x-5} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 5 \\ 0 < x+9 < x-5 \\ 0 < (x+1)(x-5) < x+9 \\ x < 5 \\ 0 > x+9 > x-5 \\ 0 > (x+1)(x-5) > x+9 \end{array} \right.$$

В этом случае обе системы несовместны, так как не может выполняться  $x+9 < x-5$  (в первой), а во второй неравенство  $(x+1)(x-5) > x+9$  имеет решение  $x \in (-\infty; -2) \cup (7; \infty)$ , что не совместно с неравенством  $0 > (x+1)(x-5)$ . Итак,  $x \in (7; \infty)$ . Находим этот ответ в таблице ответов.

*Ответ:* 4.

**3.6. Задание.** Решить уравнение.  $\log_2(2x^2 - 6x + 6,5) = 6x - 2x^2 - 3,5$ . В лист ответов записать значение наибольшего из корней, если их несколько, или значение корня, если он единственный, или слово «нет», если уравнение не имеет корней.

*Решение.* Перепишем уравнение в другом виде (приведем квадратные трехчлены к полному квадрату):  $\log_2(2 + 2(x-1,5)^2) = 1 - 2(x-1,5)^2$ . Видно, что  $x=1,5$  является корнем уравнения. Очевидно, также, что если  $x \neq 1,5$ , то левая часть уравнения больше, чем правая. Поэтому корень  $x=1,5$  единственный.

*Ответ:* 1,5.

**3.7. Задание.** Квадрат третьего члена, удвоенный пятый и удвоенный седьмой члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии образуют арифметическую прогрессию. Сумма данной бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 7. Найти первый член этой геометрической прогрессии и записать полученное значение в лист ответов.

*Решение.*  $(b_1q^2)^2$ ,  $2b_1q^4$  и  $2b_1q^6$  образуют арифметическую прогрессию, следовательно  $2b_1q^6 - 2b_1q^4 = 2b_1q^4 - (b_1q^2)^2$ . Сумма данной бесконечно убывающей геометрической

прогрессии равна 7, следовательно  $\frac{b_1}{1-q} = 7$ . Решая эту систему двух уравнений с двумя

неизвестными, найдем  $b_1 = \frac{7}{2}$   $q = \frac{1}{2}$ . При этом мы отбросили решение системы, не

удовлетворяющее условию бесконечного убывания  $|q| < 1$ .

*Ответ:*  $\frac{7}{2}$ .

**3.8. Задание.** Решить систему  $\begin{cases} \sqrt{2x+y} + \sqrt{2x-y} = 5 + \sqrt{3} \\ \sqrt{4x^2 - y^2} = \sqrt{75} \end{cases}$ . Найти сумму

$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n)$ , где  $n$  – количество решений системы. Эту сумму записать в лист ответов.

*Решение.* Обозначим:  $\sqrt{2x+y} = u$   $\sqrt{2x-y} = v$ . Тогда система переписывается в виде:

$\begin{cases} u + v = 5 + \sqrt{3} \\ uv = \sqrt{75} \end{cases}$  Эта система может быть приведена к квадратному уравнению от одной из

новых переменных, следовательно она не может иметь более двух решений. Но два решения

этой системы очевидны:  $\begin{cases} u = 5 \\ v = \sqrt{3} \end{cases}$  и  $\begin{cases} u = \sqrt{3} \\ v = 5 \end{cases}$ . Возводя каждое уравнение в квадрат, и подставляя

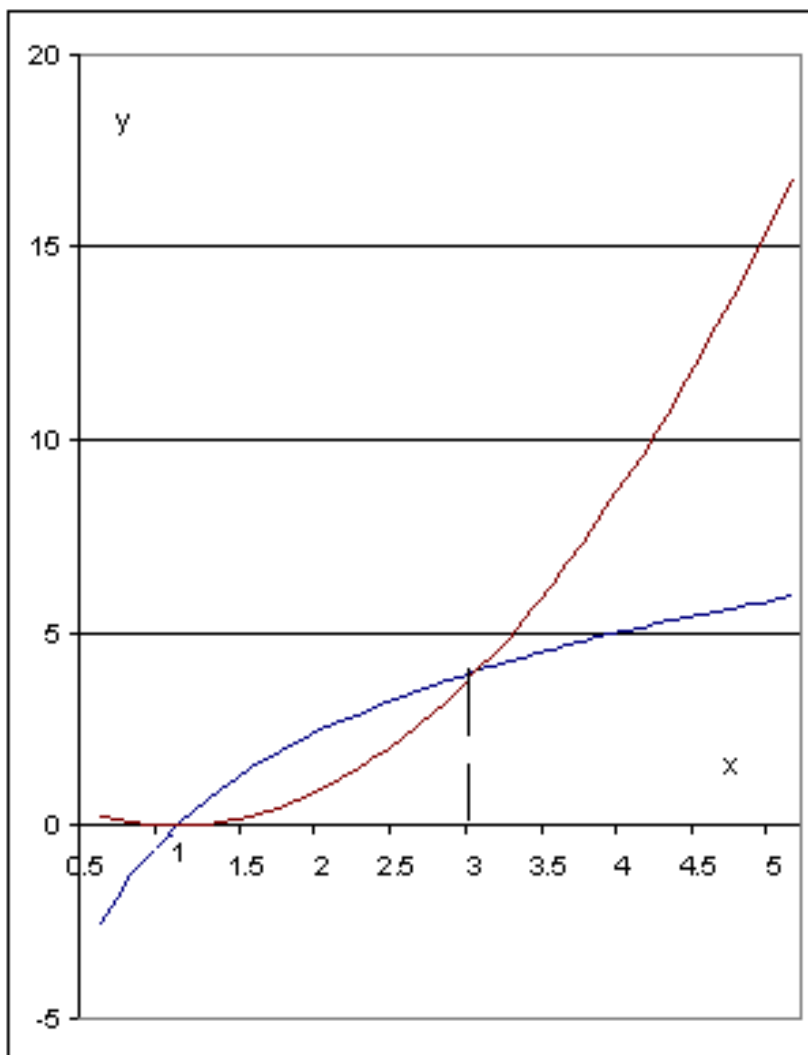
переменные  $x, y$  получим:  $\begin{cases} 2x + y = 25 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$  и  $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - y = 25 \end{cases}$ , откуда  $\begin{cases} x = 7 \\ y = 11 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x = 7 \\ y = -11 \end{cases}$

Оба решения удовлетворяют системе, что проверяется подстановкой.

*Ответ:* 14.

**3.9. Задание.** Решить уравнение  $4\log_3 x = |x^2 - 2x + 1|$  и записать значение суммы всех корней этого уравнения в лист ответов.

*Решение.* Перепишем уравнение в виде:  $4\log_3 x = (x-1)^2$ . Функции, стоящие слева и справа в уравнении легко представимы графически. Построим их графики в одном масштабе: Построив график убеждаемся, что в данном случае имеют место только две точки пересечения: при  $x=1$  и при  $x=3$ .

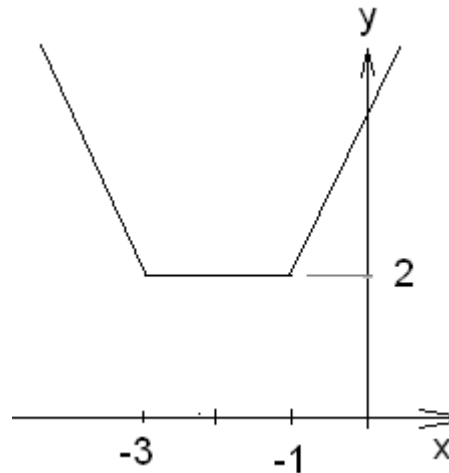


*Ответ:* 4.

**3.10. Задание.** Решить уравнение.  $\frac{1}{2^{|x+1|+|x+3|}} = \frac{5}{4} + \sin x$ . В лист ответов записать

значение наибольшего из корней, если их несколько, или значение корня, если он единственный, или слово «нет», если уравнение не имеет корней.

**Решение.** Очевидно, что правая часть уравнения не может быть меньше, чем  $\frac{1}{4}$ . Легко



построить график функции  $u = |x+1| + |x+3|$ :

Очевидно, что левая часть уравнения равна  $\frac{1}{4}$  на промежутке  $[-3; -1]$ , и меньше, чем  $\frac{1}{4}$  вне этого промежутка. Из всего этого следует, что решение найдется как решение уравнения  $\sin x = -1$  на данном промежутке. Но на этом промежутке у последнего уравнения только один корень  $x = -\frac{\pi}{2}$ . *Ответ:*  $-\frac{\pi}{2}$ .

**3.11. Задание.** Решить уравнение  $\frac{15 + x^3 - 3x^2 - 13x}{-15 + x^2 - 2x} + \frac{-24 + x^2 - 2x}{x + 4} = 2x - 7$

В лист ответов записать количество целых чисел из промежутка  $[-4; 4]$ , удовлетворяющих этому уравнению.

**Решение.** Преобразовывая данное уравнение (в каждой дроби числитель делится на знаменатель без остатка) получаем тождество. Следовательно, любое значение  $x$ , кроме тех, что обращают знаменатели в ноль, удовлетворяют данное уравнение. Исключая упомянутые значения, если они целые, из рассмотрения получаем ответ.

*Ответ:* 7.

**3.12. Задание.** Бассейн наполняется по трем трубам. В некоторый день при наполнении изначально пустого бассейна труба №1 была открыта в 9.00 и закрыта в 10.00. Во время закрытия первой трубы была открыта вторая труба, которая была закрыта в 13.00. Третья труба открывалась в 11.00 и закрывалась в 14.00. При этом в бассейн поступило 750 кубометров воды. В другой день при наполнении также изначально пустого бассейна труба №2 была открыта в 9.00 и закрыта в 12.00, а труба №1 была открыта в 11.00 и закрыта в 13.00. Третья труба открывалась в 10.00 и закрывалась в 12.00. При этом в бассейн поступило 810 кубометров воды. На третий день при наполнении также изначально пустого бассейна труба №1 была открыта в 9.00 и закрыта в 11ч.44мин. Вторая труба открывалась в 9.00 и закрывалась в 13ч.36мин. Третья труба открывалась в 11.00 и закрывалась в 14ч.24мин. В лист ответов записать количество воды в кубометрах, поступившее в бассейн в третий день.

**Решение.** Обозначим  $c_1, c_2, c_3$  – расходы воды в соответствующих трубах. По условию задачи можно записать такую систему уравнений:

$$\begin{cases} 60c_1 + 180c_2 + 180c_3 = 750 \\ 120c_1 + 180c_2 + 120c_3 = 810 \\ 164c_1 + 276c_2 + 204c_3 = x \end{cases}$$



Умножим первое уравнение на  $\alpha$ , а второе уравнение на  $\beta$  и сложим эти уравнения:

$$(60\alpha + 120\beta)c_1 + (180\alpha + 180\beta)c_2 + (180\alpha + 120\beta)c_3 = 750\alpha + 810\beta$$

Приравняем коэффициенты коэффициентам третьего уравнения. Получим:  $60\alpha + 120\beta = 164$ ,

$$180\alpha + 180\beta = 276, \quad 180\alpha + 120\beta = 204.$$

Решая любые два из них как систему, и проверяя результат в третьем, имеем:  $\alpha = \frac{1}{3} \quad \beta = \frac{6}{5}$  Тогда  $x$  найдем как  $x = 750\alpha + 810\beta = 1222$

*Ответ:* 1222.

**3.13. Задание.** Решить систему. 
$$\begin{cases} \sqrt{x-y^2+4y-8} + \sqrt{8x+y-x^2-18} \leq 10 \\ \sqrt{8y-2y^2-4-x} + \sqrt{24x-3x^2-46-y} \leq 6 \end{cases}$$
 В лист

ответов записать ноль, если система неразрешима; число  $x+y$ , если решение единственное, или минимально возможное число  $x+y$ , если решений множество ( $x, y$  – решения системы).

**Решение.** Напишем условие для области допустимых значений, одновременно приводя к полному квадрату квадратные трехчлены:

$$\begin{cases} x-4-(y-2)^2 \geq 0 \\ y-2-(x-4)^2 \geq 0 \\ -2(y-2)^2+4-x \geq 0 \\ -3(x-4)^2+2-y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 2 \\ x \leq 4 \\ y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Подставляя найденные значения в систему,

убеждаемся, что они удовлетворяют ей. Таким образом, решением системы неравенств в данном примере является единственная точка  $x=4 \quad y=2$ . Искомая сумма равна 6.

*Ответ:* 6.

**3.14. Задание.** В лист ответов записать количество корней уравнения  $3tg^2(\pi \arcsin x) = 1$ .

**Решение.**  $3tg^2\alpha = 1 \Rightarrow tg\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \Rightarrow \pi \arcsin x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \Rightarrow \arcsin x = \pm \frac{1}{6} + k$

Так как  $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$ , то имеем только 6 корней:  $\arcsin x = \pm \frac{1}{6}$ ;  $\arcsin x = \pm \frac{1}{6} - 1$ ;

$\arcsin x = \pm \frac{1}{6} + 1$ . Другие значения  $k$  не обеспечивают условие  $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$ .

*Ответ:* 6.

**3.15. Задание.** Дано равенство  $4^{1+\sqrt{|3\sin 2x-4\cos 2x|-tg^2y-6,25ctg^2y}} = \log_2 z$ . Найти наибольшее значение  $z$  и записать его в лист ответов.

**Решение.** Так как  $|3\sin 2x-4\cos 2x| \leq 5$ , а  $a^2 + 6,25\frac{1}{a^2} \geq 5$ , то подкоренное выражение либо равно нулю, либо отрицательное. Но при отрицательном значении все выражение теряет смысл, следовательно значение всего корня в показателе степени равно нулю. Следовательно,  $z=16$ .

*Ответ:* 16.

**3.16. Задание.** 
$$\left( \frac{\sqrt{24^2-x^2}}{\sqrt{24-x}} \right) \left( \frac{\sin^4(4^{-1}\pi x)}{\cos^3(4^{-1}\pi x)} - \frac{7-7\cos^2(4^{-1}\pi x)}{\cos(4^{-1}\pi x)} + 6\cos(4^{-1}\pi x) \right) = 0.$$
 В лист

ответов записать значение наибольшего из корней уравнения.

**Решение.**

Область допустимых значений определится из условий 
$$\begin{cases} 24^2 - x^2 \geq 0 \\ 24 - x > 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -24 \leq x < 24 \\ x \neq 2 + 8k \end{cases}.$$

Выражение в первой скобке равно нулю только при  $x = -24$ . Приравняв к нулю выражение во второй скобке и разделив на  $\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$  имеем  $tg^4 \frac{\pi x}{4} - 7tg^2 \frac{\pi x}{4} + 6 = 0$ . Решая это уравнение, находим корни:

$\frac{\pi}{4}x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$     $\frac{\pi}{4}x_2 = \pm \arctg 6 + \pi n \Rightarrow x_1 = \pm 1 + 4k$     $x_2 = \pm \frac{4}{\pi} \arctg 6 + 4n$ . Учитывая, что  $x < 24$ , наибольший корень есть  $x = 23$ .

**Ответ:** 23.

$$6^{(-13-x^2+8x)} + 6^{(19+x^2-8x)} = \frac{432}{81+5x^2-40x}.$$

**3.17. Задание.** Решить уравнение  $6^{(-13-x^2+8x)} + 6^{(19+x^2-8x)} = \frac{432}{81+5x^2-40x}$ . В лист ответов записать слово «нет», если уравнение не имеет корней или значение корня, если он единственный, или значение наибольшего из корней, если их несколько.

**Решение.** Преобразуем уравнение:

$$6^{3-(x-4)^2} + 6^{3+(x-4)^2} = \frac{2 \cdot 6^3}{1+5(x-4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6^{-(x-4)^2} + 6^{(x-4)^2} = \frac{2}{1+5(x-4)^2}$$

Известно, что при  $a > 0$  выполняется  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ , причем равенство имеет место только при  $a = 1$ . Поэтому левая часть уравнения не может быть меньше, чем два и равна двум только при  $x = 4$ . Правая часть уравнения, очевидно, также равна двум при  $x = 4$ , а при других значениях  $x$  меньше, чем два. Следовательно,  $x = 4$  - единственный корень.

**Ответ:** 4.

**3.18. Задание.** Два гонщика отправились одновременно от одной точки шоссе, имеющего форму круга в одном направлении. Первый гонщик первый раз догнал второго, делая свой двадцатый круг, в точке, диаметрально противоположной точке старта. Если бы гонщики стартовали одновременно от одной точки шоссе в противоположных направлениях, то их восьмая встреча произошла бы через столько времени, сколько понадобилось бы первому гонщику для преодоления четырех кругов, если бы он делал в час на один круг меньше, чем на самом деле. Сколько кругов в час делает второй гонщик? Записать это значение в лист ответов.

**Решение.** Пусть  $x, y$  – скорости гонщиков в круг/час. В момент догона первым гонщиком второго, первый прошел 19.5 кругов, а второй 18.5 кругов. Отсюда имеем  $\frac{19.5}{x} = \frac{18.5}{y}$ . В

момент восьмой встречи при старте в противоположных направлениях, сумма пройденных расстояний обоими гонщиками равна восьми кругам при скорости сближения  $x+y$ .

Приравняв время, необходимое на это сближение времени езды первого гонщика по четырем

кругам со скоростью  $x-1$ , имеем:  $\frac{8}{x+y} = \frac{4}{x-1}$ . Решая систему двух уравнений, имеем  $x=39$   
 $y=37$ .

*Ответ:* 37.

**3.19. Задание.** В лист ответов записать наибольшее значение  $x$ , удовлетворяющее данному

неравенству:  $\sqrt{60 + 225x^2 - 345x} + \sqrt{420 + 225x^2 - 615x} < 3\sqrt{-7 - 25x^2 + 40x}$

*Решение.* Область допустимых значений определяется из системы неравенств

$$\begin{cases} 60 + 225x^2 - 345x \geq 0 \\ 420 + 225x^2 - 615x \geq 0 \\ -7 - 25x^2 + 40x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 15x^2 - 23x \geq 0 \\ 28 + 15x^2 - 41x \geq 0 \\ -7 - 25x^2 + 40x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right) \\ x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{5}; \infty\right) \\ x \in \left[\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right] \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ или } x = \frac{7}{5}$$

То есть имеем всего три допустимых значения. Подставляя эти значения в неравенство

убеждаемся, что только при  $x = \frac{4}{3}$  оно удовлетворяется.

*Ответ:*  $\frac{4}{3}$ .

**3.20. Задание.** Дана система. В лист ответов записать максимально возможное значение  $y$  из решений системы.

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{27(x^2-1)}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{18}{x^2+1}} = (y-7)(y-19) + 42 \\ |y-20| + |y+20| = 40 \end{cases}$$

*Решение.* Заметим, что сумма квадратов величин  $\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$  и  $\sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$  равна единице.

Следовательно, можно обозначить  $\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \cos \varphi$   $\sqrt{\frac{2}{x^2+1}} = \sin \varphi$ . Тогда левая часть

первого уравнения  $\sqrt{27} \cos \varphi + 3 \sin \varphi$  не превосходит значения  $\sqrt{27+9} = 6$ . Но правая часть

первого уравнения есть квадратный трехчлен, имеющий минимум при  $y=13$  и равный 6.

Следовательно, значение  $y$  может быть только  $y=13$ . Подставим это значение во второе уравнение и убеждаемся, что оно удовлетворяется. Следовательно,  $y=13$ .

*Ответ:* 13.

**3.21. Задание.** Периметр некоторого многоугольника равен 158см, причем длины его сторон составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3см. Наибольшая сторона многоугольника равна 44см. В лист ответов записать количество сторон этого многоугольника.

*Решение.* Пусть  $n$  - количество сторон этого многоугольника. Тогда  $44 - (n-1)3$  длина его наименьшей стороны. Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, можем записать  $\left( (44 - (n-1)3) + \frac{n-1}{2} 3 \right) n = 158$ . Решая это квадратное уравнение, имеем:  $n = 4$  и

$n = \frac{79}{3}$ . Но при  $n = \frac{79}{3}$  длина  $44 - (n-1)3$  его наименьшей стороны получается отрицательной, что невозможно.

Ответ: 4.

**3.22. Задание.** Решить неравенство  $\sqrt{\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| - 2} - 2 \leq \log_2 x^2 + \sqrt{16 - \log_2^2 x}$ . В лист ответов записать наименьшее значение  $x$ , удовлетворяющее этому неравенству.

Решение. О.д.з. определится системой 
$$\begin{cases} x > 0 \\ \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| - 2 \geq 0 \\ 16 - \log_2^2 x \geq 0 \end{cases}$$
 Решая ее, найдем о.д.з.:

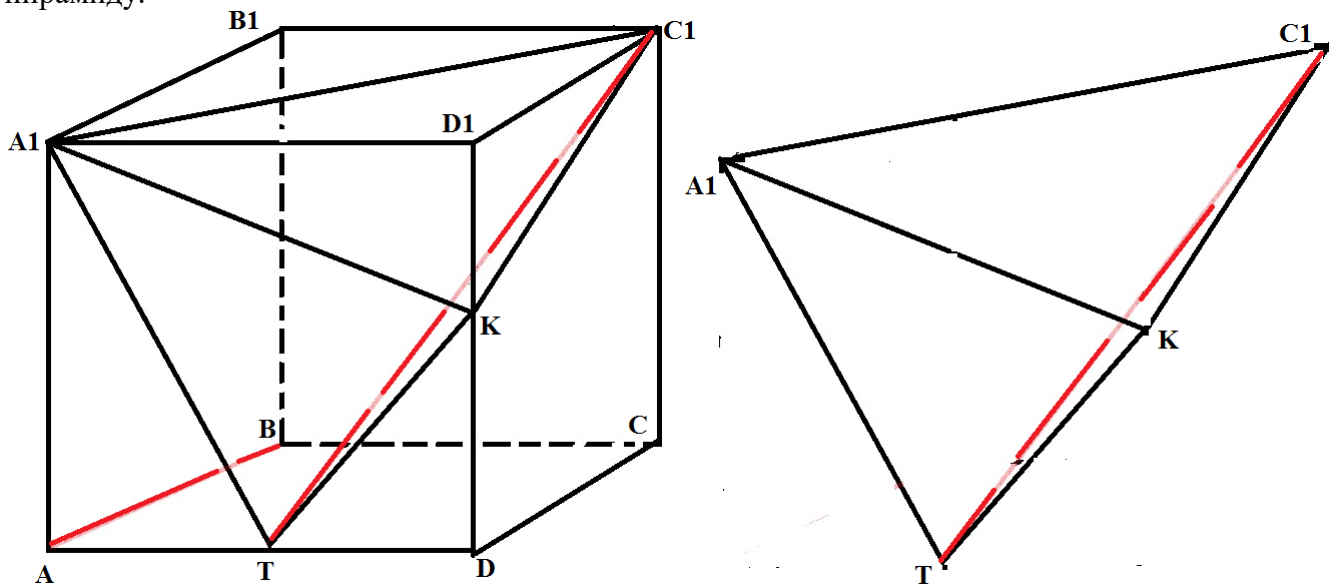
$x \in \left\{\frac{1}{16}\right\} \cup \{1\} \cup \{16\}$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 16$

удовлетворяют заданному неравенству, а  $x_3 = \frac{1}{16}$  - не удовлетворяет.

Ответ: 1.

**3.23. Задание.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , ребро которого равно 12, проведено сечение через диагональ  $A_1 C_1$  грани и середину ребра  $AD$ . Найдите объем пирамиды, основанием которой является сечение куба, а вершиной – точка  $K$  на ребре  $DD_1$  такая, что  $DK : DD_1 = 2 : 3$ . Значение найденного объема запишите в лист ответов.

Решение. На рисунке покажем построение данной пирамиды в кубе и выделенную из куба пирамиду.



Эту пирамиду с основанием  $A_1 C_1 T$  и вершиной в точке  $K$  можно также рассматривать как пирамиду с основанием  $A_1 K T$  и вершиной в точке  $C_1$ . В этом случае площадь основания находится как разность между площадью грани куба и суммой площадей треугольников  $AA_1 T$ ,

$A_1 D_1 K$  и  $TKD$ :  $S = 12 \cdot 12 - \left(\frac{12 \cdot 6}{2} + \frac{12 \cdot 4}{2} + \frac{8 \cdot 6}{2}\right) = 60$ . Высота  $h$  в этом случае, очевидно

равна длине ребра  $C_1 D_1$ , то есть 12. Тогда объем  $V$  пирамиды будет

$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} 60 \cdot 12 = 240$ . Ответ 240.