Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА и ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ при ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ

ПРОГРАММА

вступительного испытания по прикладной математике
для поступающих в СЗИУ РАНХиГС в 2022 году

Санкт-Петербург
2021

Программа вступительного испытания по математике

Порядок проведения вступительного испытания, критерии оценки результатов вступительного испытания

Вступительное испытание по математике проводится в *электронной* или *письменной* форме.

Задание состоит из 10 вопросов.

Критерии оценки: каждый правильный ответ оценивается в 10 баллов, в сумме абитуриент максимально может набрать 100 баллов.

На выполнение теста отводится 60 минут.

Оценивание ответов:

Неполный или неверный ответ, отсутствие ответа – 0 баллов,

Верный ответ: 10 баллов.

Программа вступительного испытания

Настоящая программа сформирована на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования и соответствует уровню сложности ЕГЭ по математике.

Основные темы, по которым составляются задачи экзаменационных тестов, приведены ниже:

1. Тождественные преобразования алгебраических выражений.

Действительные числа.

Действия над действительными числами. Порядок выполнения действий.

Формулы сокращенного умножения.

2. Элементарные алгебраические функции и уравнения.

Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функциональных зависимостей.

Линейная функция. Линейное уравнение и система уравнений.

Квадратичная функция. Квадратное уравнение и системы уравнений второй степени.

Иррациональные уравнения.

Показательная функция и показательные уравнения.

Логарифмическая функция и логарифмические уравнения.

3. Неравенства и системы неравенств.

Рациональные неравенства.

Иррациональные неравенства.

Неравенства с модулем.

Квадратичные, показательные и логарифмические неравенства.

4. Тригонометрические функции и уравнения.

Тригонометрические функции.

Соотношения между тригонометрическими функциями.

Формулы сложения, кратных и половинных аргументов.

Формулы преобразования сумм в произведения и произведений в суммы.

Понятие об обратных тригонометрических функциях.

Тригонометрические уравнения и неравенства.

5. Производная функции одной переменной.

Понятие производной функции.

Производные основных элементарных функций.

Производная сложной функции.

Правила дифференцирования.

Геометрический и физический смысл производной.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке.

Понятие экстремума функции.

Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма).

Достаточное условие экстремума.

Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

6. Первообразная и интеграл.

Понятие первообразной функции.

Правила нахождения первообразных.

Площадь криволинейной трапеции и интеграл.

Вычисление интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.

7. Элементы теории вероятностей.

Испытания. Исходы. События.

Теорема сложения вероятностей. Противоположные события.

Теорема умножения вероятностей. Независимые события.

8. Элементы линейной алгебры.

Понятие матрицы. Действия над матрицами.

Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей.

9. Геометрия.

Понятие объема.

Вычисление объемов тел.

Задачи по планиметрии.

Задачи по стереометрии.

Литература

1. Под ред. В.М. Говорова, Н.В. Мирошина. Математика. Сборник задач с решениями для поступающих в ВУЗы. АСТ, апрель, Москва, 2002.

2. Сергеев И. Н. Математика. Задачи с ответами и решениями. – М: КДУ: Высшая школа, 2003.

3. 2500 задач по математике с решениями. Под ред. Сканави М. И. – М. ООО «Издательский дом «Оникс 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003г.

4. Шахно К.У. Сборник задач по математике повышенной трудности. Изд. «Высшая школа» ГК СМ БССР по печати. Минск, 1964.

5. Сканави М. И. Полный сборник решений задач для поступающих в ВУЗы. «Издательство «Мир и Образование», Минск.: ООО «Харвест», 2003, кн.1, кн.2.

6. Черкасов О., Якушев А. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену (скорая помощь абитуриентам). – Москва: «Айрис Пресс», 2003.

7. Письменный Д. Т. Готовимся к экзамену по математике. – 8-е изд. – М.: «Айрис Пресс», 2003.

8. Моденов В. П. Математика: Пособие для поступающих в Вузы. – М.: ООО «Издательство Новая Волна», 2002.

9. Нараленков М. И. Вступительный экзамен по математике. Алгебра. Как решать задачи. Изд-во «Экзамен» Москва, 2003.

http://www.ege.edu.ru/ru/classes-11/preparation/demovers/

http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege

3. Примеры заданий в экзаменационных тестах прошлых лет.

3.1. Задание. Вычислить $\left(9^{\frac{3}{2}}+27^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$ и записать полученное значение в лист ответов.

Ответ: $\frac{9}{2}$.

3.2. Задание. Вычислить $\log_2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ и записать полученное значение в лист ответов.

Ответ: -1.

3.3. Задание Упростить выражение.

$$\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}}-\frac{c^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{2}{3}}}{c+d}\right):\left(\frac{(cd)^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{4}{3}}}{2}\right)^{-1}+1$$

и записать полученное выражение в лист ответов.

Решение.

$$\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}}-\frac{c^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{2}{3}}}{c+d}\right):\left(\frac{(cd)^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{4}{3}}}{2}\right)^{-1}+1=$$

$$\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{1}{3}}}{\left(c^{\frac{1}{3}}-d^{\frac{1}{3}}\right)\left(c^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{1}{3}}\right)}-\frac{c^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{2}{3}}}{\left(c^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(d^{\frac{1}{3}}\right)^3}\right)\cdot\left(\frac{d^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}\right)}{2}\right)+1=$$

$$\left(\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}-d^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}-d^{\frac{1}{3}}}\right)\frac{d^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}\right)}{2}+1=\frac{2d^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{d^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}\right)}{2}+1=d+1$$

Ответ: d+1.

3.4. Задание. Упростить выражение

$$\frac{4}{a^6}\left(81^{1+\log_3 a}-5\cdot 4^{2+4\log_4 a}\right)5^{\frac{2}{\log_a 5}},\quad a>0,\quad a\neq 1$$

и записать полученное значение в лист ответов.

Решение.

$$\frac{4}{a^6}\left(81^{1+\log_3 a}-5\cdot 4^{2+4\log_4 a}\right)5^{\frac{2}{\log_a 5}}=$$

$$\frac{4}{a^6}\left(81\cdot 81^{\log_3 a}-5\cdot 4^2 4^{4\log_4 a}\right)5^{2\log_5 a}=$$

$$\frac{4}{a^6}\left(81\cdot (3)^{\log_3 a^4}-5\cdot 4^2 4^{\log_4 a^4}\right)5^{\log_5 a^2}=$$

$$\frac{4}{a^6}\left(81\cdot a^4-5\cdot 16a^4\right)a^2=4$$

Ответ: 4.

3.5. Задание. Решить неравенство $\log_{\frac{x+9}{x-5}}(x+1)>1$ и записать номер правильного ответа в лист ответов. Ответы: $x\in$

1	2	3	4	5	6	7	8
(5;∞)	(-1;7)	(7;9)	(7;∞)	(5;7)	(9;∞)	(-9;5)	$(-9;5)\cup(7;\infty)$

Решение. Рассмотрим два случая: Основание логарифма a>1 и 0<a<1.
Имеем совокупность систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x+9}{x-5}>1\\ x+1>\dfrac{x+9}{x-5}\end{cases}\\ \begin{cases}0<\dfrac{x+9}{x-5}<1\\ 0<x+1<\dfrac{x+9}{x-5}\end{cases}\end{array}\right.$$

В каждой системе второе неравенство написано для удовлетворения исходного неравенства. Его быстрое написание возможно, если смотреть на графики логарифмической функции соответственно при a>1 и 0<a<1. Будем решать эти системы по отдельности.

$$\begin{cases}\dfrac{x+9}{x-5}>1\\ x+1>\dfrac{x+9}{x-5}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>5\\ x+9>x-5\\ (x+1)(x-5)>x+9\end{cases}\\ \begin{cases}x<5\\ x+9<x-5\\ (x+1)(x-5)<x+9\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}x>5\\ x^2-3x-14>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>5\\ x\in(-\infty;-2)\cup(7;\infty)\end{cases}\Rightarrow x\in(7;\infty)$$

Здесь вторая система несовместна, так как $x+9<x-5$ никогда не выполняется. Теперь

$$\begin{cases} 0<\dfrac{x+9}{x-5}<1 \\ 0<x+1<\dfrac{x+9}{x-5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>5 \\ 0<x+9<x-5 \\ 0<(x+1)(x-5)<x+9 \end{cases} \\ \begin{cases} x<5 \\ 0>x+9>x-5 \\ 0>(x+1)(x-5)>x+9 \end{cases} \end{array} \right.$$

В этом случае обе системы несовместны, так как не может выполняться $x+9<x-5$ (в первой), а во второй неравенство $(x+1)(x-5)>x+9$ имеет решение $x\in(-\infty;-2)\cup(7;\infty)$, что не совместно с неравенством $0>(x+1)(x-5)$. Итак, $x\in(7;\infty)$. Находим этот ответ в таблице ответов.

Ответ: 4.

3.6. Задание. Решить уравнение. $\log_2\left(2x^2-6x+6{,}5\right)=6x-2x^2-3{,}5$. В лист ответов записать значение наибольшего из корней, если их несколько, или значение корня, если он единственный, или слово «нет», если уравнение не имеет корней.

Решение. Перепишем уравнение в другом виде (приведем квадратные трехчлены к полному квадрату): $\log_2\left(2+2(x-1{,}5)^2\right)=1-2(x-1{,}5)^2$. Видно, что x=1,5 является корнем уравнения. Очевидно, также, что если $x\neq 1{,}5$, то левая часть уравнения больше, чем правая. Поэтому корень x=1,5 единственный.

Ответ: 1,5.

3.7. Задание. Решить систему $\begin{cases} \sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y}=5+\sqrt{3} \\ \sqrt{4x^2-y^2}=\sqrt{75} \end{cases}$. Найти сумму $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots(x_n+y_n)$, где n – количество решений системы. Эту сумму записать в лист ответов.

Решение. Обозначим: $\sqrt{2x+y}=u$ $\sqrt{2x-y}=v$. Тогда система перепишется в виде:

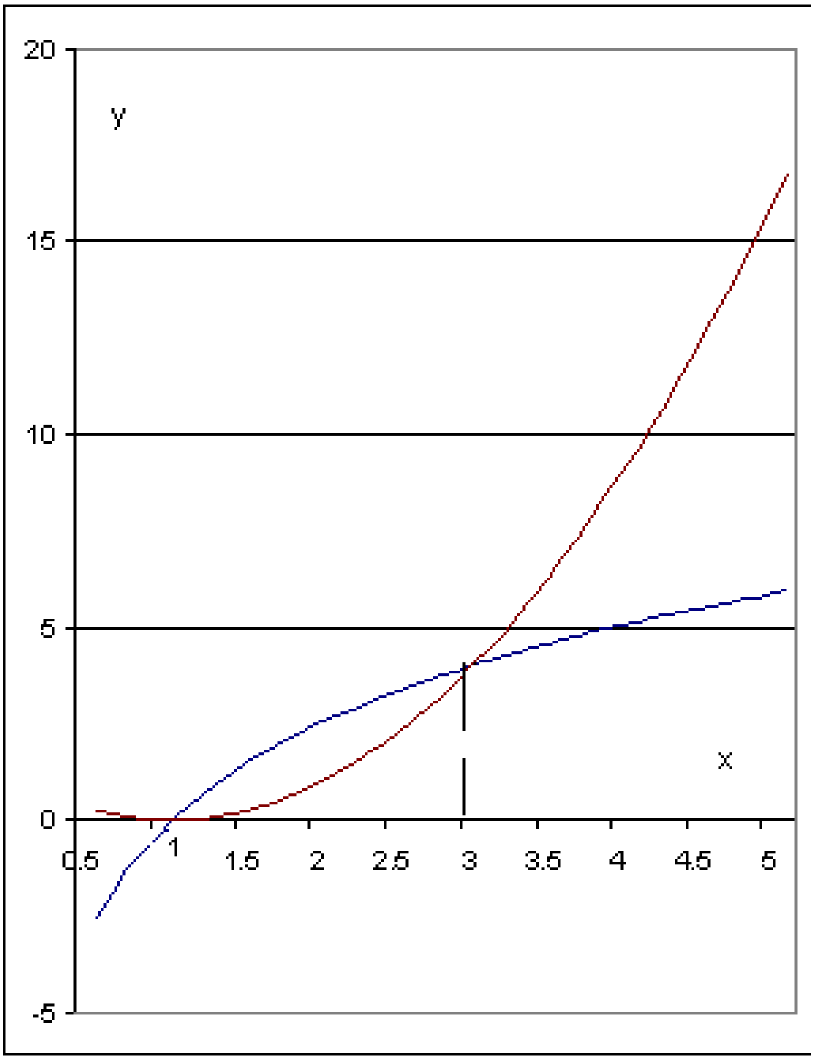
$\begin{cases} u+v=5+\sqrt{3} \\ uv=\sqrt{75} \end{cases}$ Эта система может быть приведена к квадратному уравнению от одной из новых переменных, следовательно она не может иметь более двух решений. Но два решения этой системы очевидны: $\begin{cases} u=5 \\ v=\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} u=\sqrt{3} \\ v=5 \end{cases}$. Возводя каждое уравнение в квадрат, и подставляя переменные x,y получим: $\begin{cases} 2x+y=25 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-y=25 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x=7 \\ y=11 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=7 \\ y=-11 \end{cases}$

Оба решения удовлетворяют системе, что проверяется подстановкой.

Ответ: 14.

3.8. Задание. Решить уравнение $4\log_3 x=\left|x^2-2x+1\right|$ и записать значение суммы всех корней этого уравнения в лист ответов.

Решение. Перепишем уравнение в виде: $4\log_3 x=(x-1)^2$ Функции, стоящие слева и справа в уравнении легко представимы графически. Построим их графики в одном масштабе: Построив график убеждаемся, что в данном случае имеют место только две точки пересечения: при x=1 и при x=3.



Ответ: 4.

3.9. Задание. Решить уравнение $\frac{15+x^3-3x^2-13x}{-15+x^2-2x}+\frac{-24+x^2-2x}{x+4}=2x-7$

В лист ответов записать количество целых чисел из промежутка [-4;4], удовлетворяющих этому уравнению.

Решение. Преобразовывая данное уравнение (в каждой дроби числитель делится на знаменатель без остатка) получаем тождество. Следовательно, любое значение x, кроме тех, что обращают знаменатели в ноль, удовлетворяют данное уравнение. Исключая упомянутые значения, если они целые, из рассмотрения получаем ответ.

Ответ: 7.

3.10. Задание. Решить систему. $\begin{cases} \sqrt{x-y^2+4y-8}+\sqrt{8x+y-x^2-18} \le 10 \\ \sqrt{8y-2y^2-4-x}+\sqrt{24x-3x^2-46-y} \le 6 \end{cases}$ В лист ответов записать ноль, если система неразрешима; число x+y, если решение единственное, или минимально возможное число x+y, если решений множество (x,y – решения системы).

Решение. Напишем условие для области допустимых значений, одновременно приводя к полному квадрату квадратные трехчлены:

$$\begin{cases} x-4-(y-2)^2 \ge 0 \\ y-2-(x-4)^2 \ge 0 \\ -2(y-2)^2+4-x \ge 0 \\ -3(x-4)^2+2-y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ y \ge 2 \\ x \le 4 \\ y \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}.$$ Подставляя найденные значения в систему, убеждаемся, что они удовлетворяют ей. Таким образом, решением системы неравенств в данном примере является единственная точка x=4 y=2. Искомая сумма равна 6.
Ответ: 6.

3.11. Задание. В лист ответов записать количество корней уравнения $3tg^2(\pi \arcsin x)=1$.

Решение. $3tg^2\alpha=1 \Rightarrow tg\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k \Rightarrow \pi\arcsin x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k \Rightarrow \arcsin x=\pm\frac{1}{6}+k$

Так как $|\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}$, то имеем только 6 корней: $\arcsin x=\pm\frac{1}{6}$; $\arcsin x=\pm\frac{1}{6}-1$; $\arcsin x=\pm\frac{1}{6}+1$. Другие значения k не обеспечивают условие $|\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 6.

3.12. Задание. $\left(\frac{\sqrt{24^2-x^2}}{\sqrt{24-x}}\right)\left(\frac{\sin^4(4^{-1}\pi x)}{\cos^3(4^{-1}\pi x)}-\frac{7-7\cos^2(4^{-1}\pi x)}{\cos(4^{-1}\pi x)}+6\cos(4^{-1}\pi x)\right)=0$. В лист ответов записать значение наибольшего из корней уравнения.

Решение.

Область допустимых значений определится из условий $\begin{cases} 24^2-x^2 \ge 0 \\ 24-x>0 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -24 \le x < 24 \\ x \ne 2+8k \end{cases}$.

Выражение в первой скобке равно нулю только при $x=-24$. Приравнивая к нулю выражение во второй скобке и разделив на $\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ имеем $tg^4\frac{\pi x}{4}-7tg^2\frac{\pi x}{4}+6=0$. Решая это уравнение, находим корни:

$\frac{\pi}{4}x_1=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$ $\frac{\pi}{4}x_2=\pm arctg6+\pi n$ $\Rightarrow$ $x_1=\pm1+4k$ $x_2=\pm\frac{4}{\pi}arctg6+4n$. Учитывая, что $x<24$, наибольший корень есть $x=23$.

Ответ: 23.

3.13. Задание. Решить уравнение $6^{(-13-x^2+8x)}+6^{(19+x^2-8x)}=\frac{432}{81+5x^2-40x}$. В лист ответов записать слово «нет», если уравнение не имеет корней или значение корня, если он единственный, или значение наибольшего из корней, если их несколько.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$6^{3-(x-4)^2}+6^{3+(x-4)^2}=\frac{2\cdot6^3}{1+5(x-4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6^{-(x-4)^2}+6^{(x-4)^2}=\frac{2}{1+5(x-4)^2}$$

Известно, что при $a > 0$ выполняется $a + \frac{1}{a} \geq 2$, причем равенство имеет место только при $a = 1$. Поэтому левая часть уравнения не может быть меньше, чем два и равна двум только при $x = 4$. Правая часть уравнения, очевидно, также равна двум при $x = 4$, а при других значениях x меньше, чем два. Следовательно, $x = 4$ - единственный корень.
Ответ: 4.

3.14. Задание. В лист ответов записать наибольшее значение x, удовлетворяющее данному неравенству: $\sqrt{60 + 225x^2 - 345x} + \sqrt{420 + 225x^2 - 615x} < 3\sqrt{-7 - 25x^2 + 40x}$
Решение. Область допустимых значений определяется из системы неравенств

$$\begin{cases} 60 + 225x^2 - 345x \geq 0 \\ 420 + 225x^2 - 615x \geq 0 \\ -7 - 25x^2 + 40x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 15x^2 - 23x \geq 0 \\ 28 + 15x^2 - 41x \geq 0 \\ -7 - 25x^2 + 40x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right) \\ x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{5}; \infty\right) \\ x \in \left[\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right] \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ или } x = \frac{7}{5}$$

То есть имеем всего три допустимых значения. Подставляя эти значения в неравенство убеждаемся, что только при $x = \frac{4}{3}$ оно удовлетворяется.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

3.15. Задание. Решить неравенство $\sqrt{\left|\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| - 2\right| - 2} \leq \log_2 x^2 + \sqrt{16 - \log_2^2 x}$. В лист ответов записать наименьшее значение x, удовлетворяющее этому неравенству.

Решение. О.д.з. определится системой $\begin{cases} x > 0 \\ \left|\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| - 2\right| - 2 \geq 0 \\ 16 - \log_2^2 x \geq 0 \end{cases}$ Решая ее, найдем о.д.з.:

$x \in \left\{\frac{1}{16}\right\} \cup \{1\} \cup \{16\}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x_1 = 1$ и $x_2 = 16$ удовлетворяют заданному неравенству, а $x_3 = \frac{1}{16}$ - не удовлетворяет.

Ответ: 1.

3.16. Задание. Вычислить производную функции $f(x)$

А) $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x} + 5x - 2$

Б) $f(x) = cosx \cdot (x^3 + 2x)$

В) $f(x) = ctg3x$

Г) $f(x) = e^{x^3} - ln5x$

Решение. Используя формулы и правила дифференцирования, имеем

А) $f'(x) = (x^2)' - 4\left(\sqrt{x}\right)' + 5(x)' - (2)' = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}} + 5$

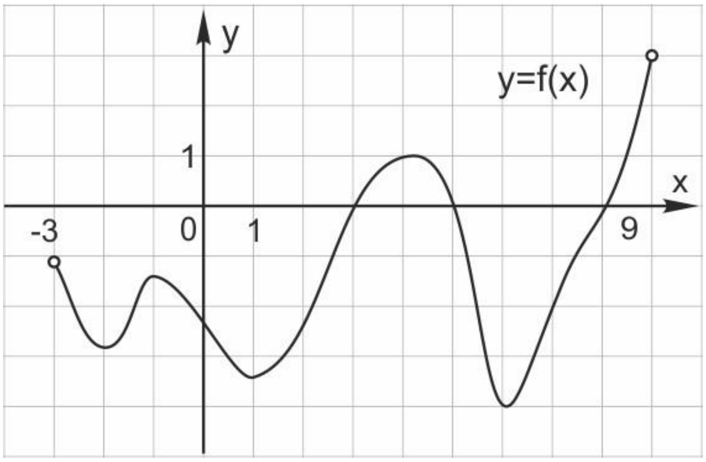
Б) $f'(x) = (\cos x)' \cdot (x^3 + 2x) + cosx \cdot (x^3 + 2x)' =$

$= -sinx \cdot (x^3 + 2x) + cosx \cdot (3x^2 + 2)$

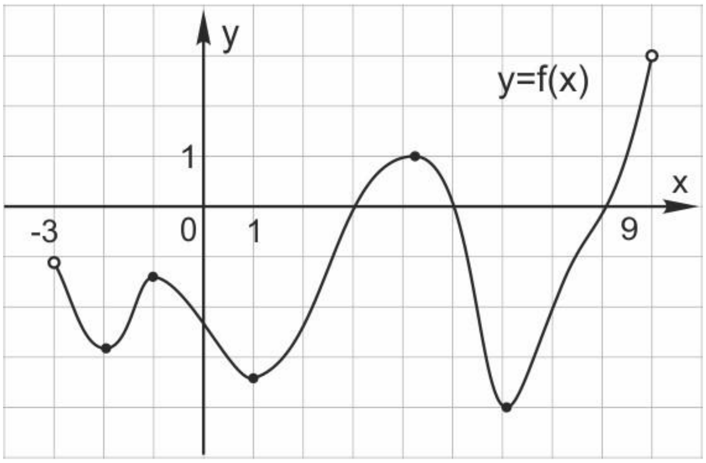
В) $f'(x) = (ctg3x)' = -\frac{1}{sin^2 3x} \cdot (3x)' = -\frac{3}{sin^2 3x}$

Г) $f'(x) = (e^{x^3})' - (ln5x)' = e^{x^3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{x}$

3.17. Задание. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$, определенной на интервале (-3;9). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



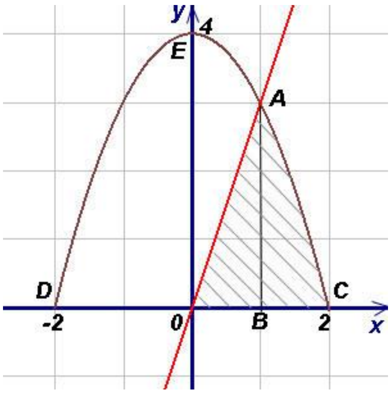
Решение. Производная функции $f'(x)$ равна нулю в точках максимума и минимума функции $f(x)$. По графику видно, что таких точек 5.



Ответ: 5

3.18. Задание. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $y = 0$ и находящейся в первой четверти.

Решение.



Вычислим площадь искомой фигуры как $S = S_{AOB} + S_{ABC}$.

Для этого найдем абсциссу точки А из решения уравнения $4 - x^2 = 3x$. Получим $x_A = 1$.

Имеем

$S = \int_0^1 3x dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = \frac{3}{2} + \left(8 - \frac{8}{3}\right) - (4 - \frac{1}{3}) = \frac{19}{6}$

Ответ: $\frac{19}{6}$

3.19. Задание. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

Решение.

Обозначим попадание в мишень с первого выстрела буквой А, со второго - буквой В.

Вероятность попасть в мишень с двух выстрелов равна сумме вероятностей:

P(A+ B) =P(A) + P(B).

Вероятность попасть в мишень с первого выстрела известна: 0,7. Надо найти вероятность попасть со второго выстрела.

Вероятность попасть со второго выстрела равна произведению вероятности попасть и вероятности не попасть в мишень (независимые события):

P(B) = 0,3 · 0,7 = 0,21.

Осталось найти сумму вероятностей:

P(A) + P(B) =0,7 + 0,21 = 0,91.

Ответ: 0,91

3.20. Задание. А) Найдите матрицу $3A - 2B$, если $A_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$

Б) Найдите произведение матриц А и В, если A_{1x3} = (-1 0 2), $B_{3x1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

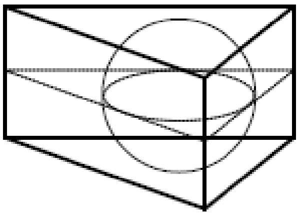
Решение. А) $3A_{2x2} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$, $2B_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ 4 & -20 \end{pmatrix}$

3A - 2B = $\begin{pmatrix} 6 & 27 \\ -7 & 32 \end{pmatrix}$

Б) AB_{1x1} = (-1·2 + 0·(-1) + 2·4) = (6)

3.21. Задание. В правильную треугольную призму объемом $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ вписан шар. Найдите радиус шара.

Решение.



Выразим объем призмы, используя формулу: $V_{п} = S_{осн} \cdot h$, где $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$r_{ш} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$
$$h_{п} = 2r_{ш}$$
$$h_{п} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Подставим в формулу объема призмы

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$$
$$a^3 = 81\sqrt{3}$$
$$a = 3\sqrt{3}$$

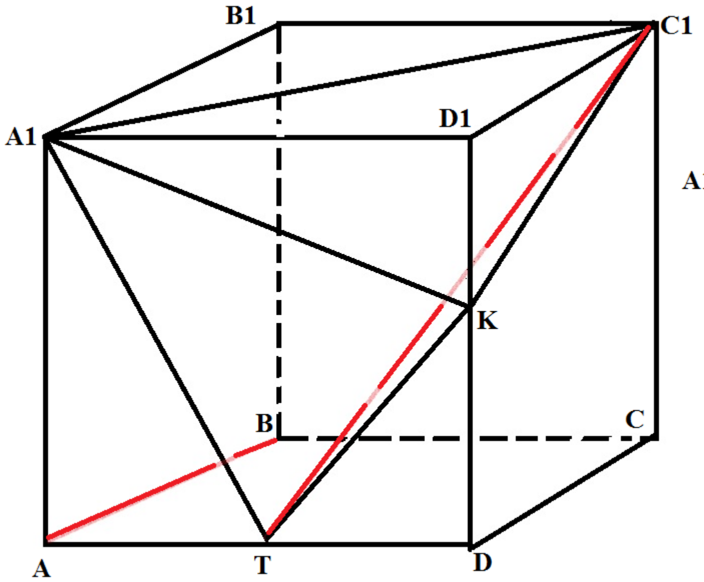
Теперь найдем $r_{ш}$:

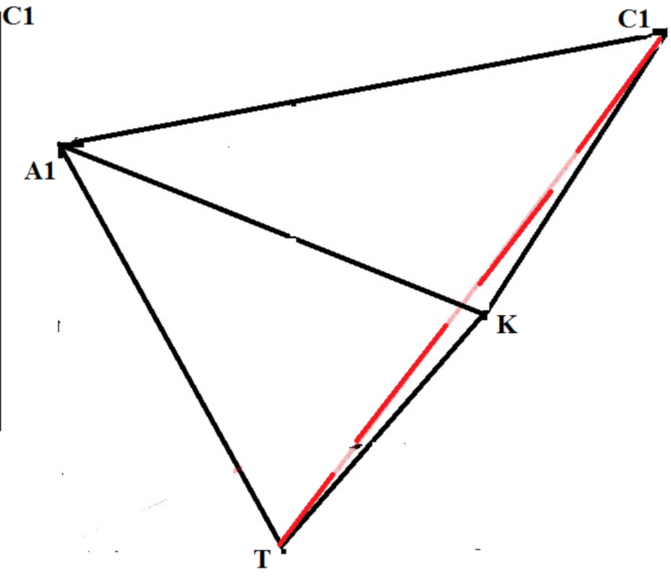
$$r_{ш} = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Ответ: 1,5

3.22. Задание. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 12, проведено сечение через диагональ A_1C_1 грани и середину ребра AD. Найдите объем пирамиды, основанием которой является сечение куба, а вершиной – точка К на ребре DD_1 такая, что $DK : DD_1 = 2 : 3$. Значение найденного объема запишите в лист ответов.

Решение. На рисунке покажем построение данной пирамиды в кубе и выделенную из куба пирамиду.





Эту пирамиду с основанием A1C1T и вершиной в точке K можно также рассматривать как пирамиду с основанием A1KT и вершиной в точке C1. В этом случае площадь основания находится как разность между площадью грани куба и суммой площадей треугольников AA1T, A1D1K и TKD : $S = 12 \cdot 12 - \left(\frac{12 \cdot 6}{2} + \frac{12 \cdot 4}{2} + \frac{8 \cdot 6}{2} \right) = 60$. Высота h в этом случае, очевидно равна длине ребра C1D1, то есть 12. Тогда объем V пирамиды будет $V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} 60 \cdot 12 = 240$. Ответ: 240.