Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА и ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ при ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ

ПРОГРАММА

вступительного испытания по математике

для поступающих в СЗИУ РАНХиГС в 2022 году

Санкт-Петербург
2021

Программа вступительного испытания
по математике

Порядок проведения вступительного испытания, критерии оценки результатов вступительного испытания

Вступительное испытание по математике проводится в *электронной* или *письменной* форме.

Задание состоит из 10 вопросов.

Критерии оценки: каждый правильный ответ оценивается в 10 баллов, в сумме абитуриент максимально может набрать 100 баллов.

На выполнение теста отводится 60 минут.

Оценивание ответов:

Неполный или неверный ответ, отсутствие ответа – 0 баллов,

Верный ответ: 10 баллов.

Программа вступительного испытания

Настоящая программа сформирована на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования и соответствует уровню сложности ЕГЭ по математике.

Основные темы, по которым составляются задачи экзаменационных тестов, приведены ниже:

1. Тождественные преобразования алгебраических выражений.

Действительные числа.

Действия над действительными числами. Порядок выполнения действий.

Формулы сокращенного умножения.

2. Элементарные алгебраические функции и уравнения.

Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функциональных зависимостей.

Линейная функция. Линейное уравнение и система уравнений.

Квадратичная функция. Квадратное уравнение и системы уравнений второй степени.

Иррациональные уравнения.

Показательная функция и показательные уравнения.

Логарифмическая функция и логарифмические уравнения.

3. Неравенства и системы неравенств.

Рациональные неравенства.

Иррациональные неравенства.

Неравенства с модулем.

Квадратичные, показательные и логарифмические неравенства.

4. Тригонометрические функции и уравнения.

Тригонометрические функции.

Соотношения между тригонометрическими функциями.

Формулы сложения, кратных и половинных аргументов.

Формулы преобразования сумм в произведения и произведений в суммы.

Понятие об обратных тригонометрических функциях.

Тригонометрические уравнения и неравенства.

5. Прогрессии, суммы, бесконечные дроби и иррациональности.

Арифметическая прогрессия.

Геометрическая прогрессия.

Вычисление сумм бесконечного числа слагаемых, бесконечных дробей и других выражений.

6. Текстовые задачи.

Несмотря на то, что на письменном экзамене абитуриент «не отвечает» на теоретические вопросы, положения теории не должны игнорироваться при подготовке к экзамену. Имеется множество примеров, когда пробелы в теории являлись источником ошибок при решении задач. Следует также понимать, что никакое пособие не может охватить всех стандартных и нестандартных приемов решения задач. От абитуриента требуется не только знание стандартных приемов, но и некоторая смекалка при решении задач, которая достигается только практикой.

6. Задачи по планиметрии.

7. Задачи по стереометрии.

Литература

1. Под ред. В.М. Говорова, Н.В. Мирошина. Математика. Сборник задач с решениями для поступающих в ВУЗы. АСТ, апрель, Москва, 2002.

2. Сергеев И. Н. Математика. Задачи с ответами и решениями. – М: КДУ: Высшая школа, 2003.

3. 2500 задач по математике с решениями. Под ред. Сканави М. И. – М. ООО «Издательский дом «Оникс 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003г.

4. Шахно К.У. Сборник задач по математике повышенной трудности. Изд. «Высшая школа» ГК СМ БССР по печати. Минск, 1964.

5. Сканави М. И. Полный сборник решений задач для поступающих в ВУЗы. «Издательство «Мир и Образование», Минск.: ООО «Харвест», 2003, кн.1, кн.2.

6. Черкасов О., Якушев А. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену (скорая помощь абитуриентам). – Москва: «Айрис Пресс», 2003.

7. Письменный Д. Т. Готовимся к экзамену по математике. – 8-е изд. – М.: «Айрис Пресс», 2003.

8. Моденов В. П. Математика: Пособие для поступающих в Вузы. – М.: ООО «Издательство Новая Волна», 2002.

9. Нараленков М. И. Вступительный экзамен по математике. Алгебра. Как решать задачи. Изд-во «Экзамен» Москва, 2003.

http://www.ege.edu.ru/ru/classes-11/preparation/demovers/

http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege

3. Примеры заданий в экзаменационных тестах прошлых лет.

3.1. Задание. Вычислить $\left(9^{\frac{3}{2}}+27^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$ и записать полученное значение в лист ответов.

Ответ: $\frac{9}{2}$.

3.2. Задание. Вычислить $\log_2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ и записать полученное значение в лист ответов.

Ответ: -1.

3.3. Задание Упростить выражение.

$$\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}}-\frac{c^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{2}{3}}}{c+d}\right):\left(\frac{(cd)^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{4}{3}}}{2}\right)^{-1}+1$$

и записать полученное выражение в лист ответов.

Решение.

$$\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}}-\frac{c^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{2}{3}}}{c+d}\right):\left(\frac{(cd)^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{4}{3}}}{2}\right)^{-1}+1=$$

$$\left(\frac{c^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{1}{3}}}{\left(c^{\frac{1}{3}}-d^{\frac{1}{3}}\right)\left(c^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{1}{3}}\right)}-\frac{c^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{2}{3}}}{\left(c^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(d^{\frac{1}{3}}\right)^3}\right)\cdot\left(\frac{d^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}\right)}{2}\right)+1=$$

$$\left(\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}-d^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}-d^{\frac{1}{3}}}\right)\frac{d^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}\right)}{2}+1=\frac{2d^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}}\,\frac{d^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}\right)}{2}+1=d+1$$

Ответ: d+1.

3.4. Задание. Упростить выражение

$$\frac{4}{a^6}\left(81^{1+\log_3 a}-5\cdot 4^{2+4\log_4 a}\right)5^{\frac{2}{\log_a 5}},\quad a>0,\quad a\neq 1$$

и записать полученное значение в лист ответов.

Решение.

$$\frac{4}{a^6}\left(81^{1+\log_3 a}-5\cdot 4^{2+4\log_4 a}\right)5^{\frac{2}{\log_a 5}}=$$

$$\frac{4}{a^6}\left(81\cdot 81^{\log_3 a}-5\cdot 4^2 4^{4\log_4 a}\right)5^{2\log_5 a}=$$

$$\frac{4}{a^6}\left(81\cdot (3)^{\log_3 a^4}-5\cdot 4^2 4^{\log_4 a^4}\right)5^{\log_5 a^2}=$$

$$\frac{4}{a^6}\left(81\cdot a^4-5\cdot 16a^4\right)a^2=4$$

Ответ: 4.

3.5. Задание. Решить неравенство $\log_{\frac{x+9}{x-5}}(x+1)>1$ и записать номер правильного ответа в лист ответов. Ответы: $x\in$

1	2	3	4	5	6	7	8
(5;∞)	(-1;7)	(7;9)	(7;∞)	(5;7)	(9;∞)	(-9;5)	$(-9;5)\cup(7;\infty)$

Решение. Рассмотрим два случая: Основание логарифма a>1 и 0<a<1.
Имеем совокупность систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x+9}{x-5}>1\\ x+1>\dfrac{x+9}{x-5}\end{cases}\\ \begin{cases}0<\dfrac{x+9}{x-5}<1\\ 0<x+1<\dfrac{x+9}{x-5}\end{cases}\end{array}\right.$$

В каждой системе второе неравенство написано для удовлетворения исходного неравенства. Его быстрое написание возможно, если смотреть на графики логарифмической функции соответственно при a>1 и 0<a<1. Будем решать эти системы по отдельности.

$$\begin{cases}\dfrac{x+9}{x-5}>1\\ x+1>\dfrac{x+9}{x-5}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>5\\ x+9>x-5\\ (x+1)(x-5)>x+9\end{cases}\\ \begin{cases}x<5\\ x+9<x-5\\ (x+1)(x-5)<x+9\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}x>5\\ x^2-3x-14>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>5\\ x\in(-\infty;-2)\cup(7;\infty)\end{cases}\Rightarrow x\in(7;\infty)$$

Здесь вторая система несовместна, так как $x+9<x-5$ никогда не выполняется. Теперь

$$\begin{cases} 0<\dfrac{x+9}{x-5}<1 \\ 0<x+1<\dfrac{x+9}{x-5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>5 \\ 0<x+9<x-5 \\ 0<(x+1)(x-5)<x+9 \end{cases} \\ \begin{cases} x<5 \\ 0>x+9>x-5 \\ 0>(x+1)(x-5)>x+9 \end{cases} \end{array} \right.$$

В этом случае обе системы несовместны, так как не может выполняться $x+9<x-5$ (в первой), а во второй неравенство $(x+1)(x-5)>x+9$ имеет решение $x\in(-\infty;-2)\cup(7;\infty)$, что не совместно с неравенством $0>(x+1)(x-5)$. Итак, $x\in(7;\infty)$. Находим этот ответ в таблице ответов.

Ответ: 4.

3.6. Задание. Решить уравнение. $\log_2\left(2x^2-6x+6{,}5\right)=6x-2x^2-3{,}5$. В лист ответов записать значение наибольшего из корней, если их несколько, или значение корня, если он единственный, или слово «нет», если уравнение не имеет корней.

Решение. Перепишем уравнение в другом виде (приведем квадратные трехчлены к полному квадрату): $\log_2\left(2+2(x-1{,}5)^2\right)=1-2(x-1{,}5)^2$. Видно, что x=1,5 является корнем уравнения. Очевидно, также, что если $x\neq 1{,}5$, то левая часть уравнения больше, чем правая. Поэтому корень x=1,5 единственный.

Ответ: 1,5.

3.7. Задание. Квадрат третьего члена, удвоенный пятый и удвоенный седьмой члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии образуют арифметическую прогрессию. Сумма данной бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 7. Найти первый член этой геометрической прогрессии и записать полученное значение в лист ответов.

Решение. $\left(b_1q^2\right)^2$, $2b_1q^4$ и $2b_1q^6$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно $2b_1q^6-2b_1q^4=2b_1q^4-\left(b_1q^2\right)$. Сумма данной бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 7, следовательно $\dfrac{b_1}{1-q}=7$. Решая эту систему двух уравнений с двумя неизвестными, найдем $b_1=\dfrac{7}{2}$ $q=\dfrac{1}{2}$. При этом мы отбросили решение системы, не удовлетворяющее условию бесконечного убывания $|q|<1$.

Ответ: $\dfrac{7}{2}$.

3.8. Задание. Решить систему $\begin{cases} \sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y}=5+\sqrt{3} \\ \sqrt{4x^2-y^2}=\sqrt{75} \end{cases}$. Найти сумму $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots(x_n+y_n)$, где n – количество решений системы. Эту сумму записать в лист ответов.

Решение. Обозначим: $\sqrt{2x+y}=u$ $\sqrt{2x-y}=v$. Тогда система перепишется в виде:

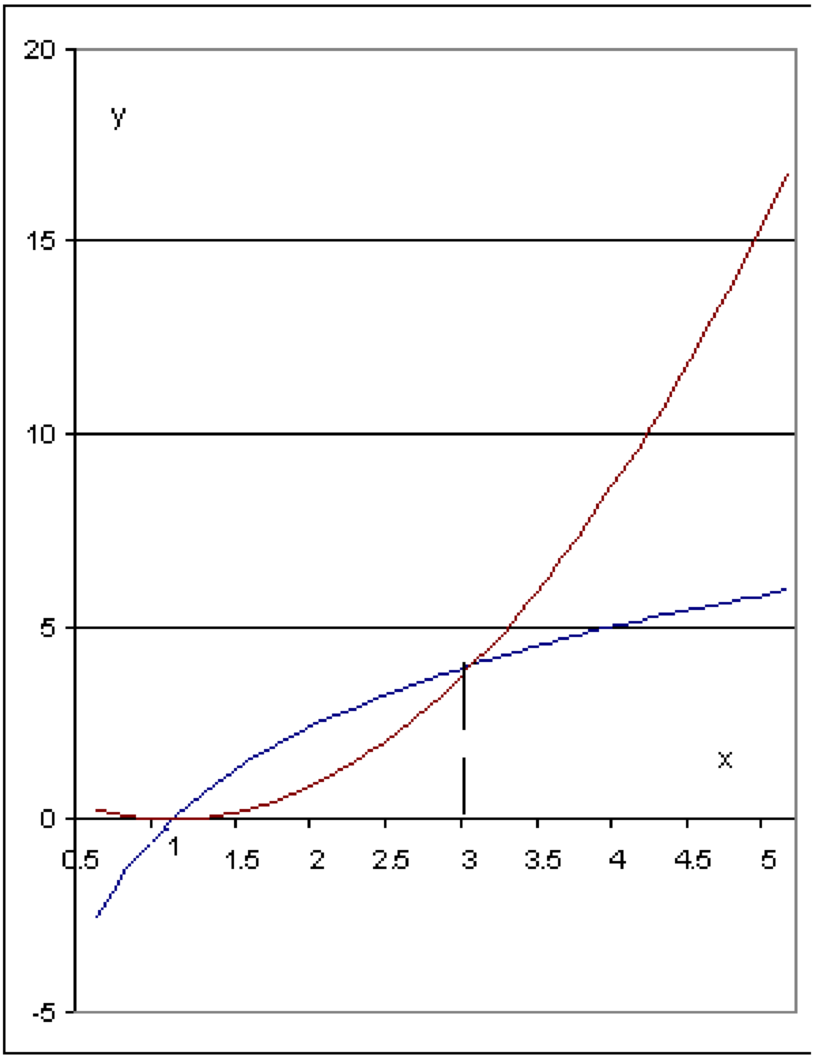
$\begin{cases} u+v=5+\sqrt{3} \\ uv=\sqrt{75} \end{cases}$ Эта система может быть приведена к квадратному уравнению от одной из новых переменных, следовательно она не может иметь более двух решений. Но два решения этой системы очевидны: $\begin{cases} u=5 \\ v=\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} u=\sqrt{3} \\ v=5 \end{cases}$. Возводя каждое уравнение в квадрат, и подставляя переменные x,y получим: $\begin{cases} 2x+y=25 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-y=25 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x=7 \\ y=11 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=7 \\ y=-11 \end{cases}$

Оба решения удовлетворяют системе, что проверяется подстановкой.

Ответ: 14.

3.9. Задание. Решить уравнение $4\log_3 x = \left|x^2-2x+1\right|$ и записать значение суммы всех корней этого уравнения в лист ответов.

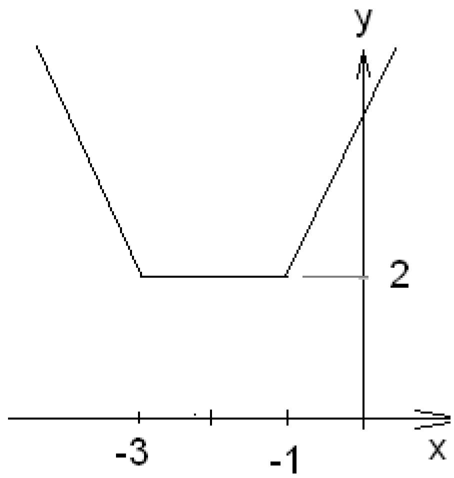
Решение. Перепишем уравнение в виде: $4\log_3 x = (x-1)^2$ Функции, стоящие слева и справа в уравнении легко представимы графически. Построим их графики в одном масштабе: Построив график убеждаемся, что в данном случае имеют место только две точки пересечения: при x=1 и при x=3.



Ответ: 4.

3.10. Задание. Решить уравнение. $$\frac{1}{2^{|x+1|+|x+3|}} = \frac{5}{4} + \sin x.$$ В лист ответов записать значение наибольшего из корней, если их несколько, или значение корня, если он единственный, или слово «нет», если уравнение не имеет корней.

Решение. Очевидно, что правая часть уравнения не может быть меньше, чем $\frac{1}{4}$. Легко



построить график функции $u = |x+1| + |x+3|$:

Очевидно, что левая часть уравнения равна $\frac{1}{4}$ на промежутке [-3; -1], и меньше, чем $\frac{1}{4}$ вне этого промежутка. Из всего этого следует, что решение найдется как решение уравнения $\sin x = -1$ на данном промежутке. Но на этом промежутке у последнего уравнения только один корень $x = -\frac{\pi}{2}$. *Ответ:* $-\frac{\pi}{2}$.

3.11. Задание. Решить уравнение $\frac{15 + x^3 - 3x^2 - 13x}{-15 + x^2 - 2x} + \frac{-24 + x^2 - 2x}{x + 4} = 2x - 7$

В лист ответов записать количество целых чисел из промежутка [-4;4], удовлетворяющих этому уравнению.

Решение. Преобразовывая данное уравнение (в каждой дроби числитель делится на знаменатель без остатка) получаем тождество. Следовательно, любое значение x, кроме тех, что обращают знаменатели в ноль, удовлетворяют данное уравнение. Исключая упомянутые значения, если они целые, из рассмотрения получаем ответ.

Ответ: 7.

3.12. Задание. Бассейн наполняется по трем трубам. В некоторый день при наполнении изначально пустого бассейна труба №1 была открыта в 9.00 и закрыта в 10.00. Во время закрытия первой трубы была открыта вторая труба, которая была закрыта в 13.00. Третья труба открывалась в 11.00 и закрывалась в 14.00. При этом в бассейн поступило 750 кубометров воды. В другой день при наполнении также изначально пустого бассейна труба №2 была открыта в 9.00 и закрыта в 12.00, а труба №1 была открыта в 11.00 и закрыта в 13.00. Третья труба открывалась в 10.00 и закрывалась в 12.00. При этом в бассейн поступило 810 кубометров воды. На третий день при наполнении также изначально пустого бассейна труба №1 была открыта в 9.00 и закрыта в 11ч.44мин. Вторая труба открывалась в 9.00 и закрывалась в 13ч.36мин. Третья труба открывалась в 11.00 и закрывалась в 14ч.24мин. В лист ответов записать количество воды в кубометрах, поступившее в бассейн в третий день.

Решение. Обозначим c1, c2,c3 – расходы воды в соответствующих трубах. По условию задачи можно записать такую систему уравнений:

$$\begin{cases} 60c_1 + 180c_2 + 180c_3 = 750 \\ 120c_1 + 180c_2 + 120c_3 = 810 \\ 164c_1 + 276c_2 + 204c_3 = x \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на α, а второе уравнение на β и сложим эти уравнения: $(60\alpha+120\beta)c_1+(180\alpha+180\beta)c_2+(180\alpha+120\beta)c_3=750\alpha+810\beta$ Приравняем коэффициенты коэффициентам третьего уравнения. Получим: $60\alpha+120\beta=164$, $180\alpha+180\beta=276$, $180\alpha+120\beta=204$. Решая любые два из них как систему, и проверяя результат в третьем, имеем: $\alpha=\dfrac{1}{3}$ $\beta=\dfrac{6}{5}$ Тогда x найдем как $x=750\alpha+810\beta=1222$

Ответ: 1222.

3.13. Задание. Решить систему. $\begin{cases}\sqrt{x-y^2+4y-8}+\sqrt{8x+y-x^2-18}\le 10\\ \sqrt{8y-2y^2-4-x}+\sqrt{24x-3x^2-46-y}\le 6\end{cases}$ В лист ответов записать ноль, если система неразрешима; число x+y, если решение единственное, или минимально возможное число x+y, если решений множество (x,y – решения системы).

Решение. Напишем условие для области допустимых значений, одновременно приводя к полному квадрату квадратные трехчлены:

$$\begin{cases}x-4-(y-2)^2\ge 0\\ y-2-(x-4)^2\ge 0\\ -2(y-2)^2+4-x\ge 0\\ -3(x-4)^2+2-y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 4\\ y\ge 2\\ x\le 4\\ y\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}.$$

Подставляя найденные значения в систему, убеждаемся, что они удовлетворяют ей. Таким образом, решением системы неравенств в данном примере является единственная точка x=4 y=2. Искомая сумма равна 6.

Ответ: 6.

3.14. Задание. В лист ответов записать количество корней уравнения $3tg^2(\pi\arcsin x)=1$.

Решение. $3tg^2\alpha=1\Rightarrow tg\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k\Rightarrow\pi\arcsin x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k\Rightarrow\arcsin x=\pm\dfrac{1}{6}+k$

Так как $|\arcsin x|\le\dfrac{\pi}{2}$, то имеем только 6 корней: $\arcsin x=\pm\dfrac{1}{6}$; $\arcsin x=\pm\dfrac{1}{6}-1$; $\arcsin x=\pm\dfrac{1}{6}+1$. Другие значения k не обеспечивают условие $|\arcsin x|\le\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: 6.

3.15. Задание. Дано равенство $4^{1+\sqrt{|3\sin 2x-4\cos 2x|-tg^2y-6,25ctg^2y}}=\log_2 z$. Найти наибольшее значение z и записать его в лист ответов.

Решение. Так как $|3\sin 2x-4\cos 2x|\le 5$, а $a^2+6,25\dfrac{1}{a^2}\ge 5$, то подкоренное выражение либо равно нулю, либо отрицательное. Но при отрицательном значении все выражение теряет смысл, следовательно значение всего корня в показателе степени равно нулю. Следовательно, z=16.

Ответ: 16.

3.16. Задание. $\left(\dfrac{\sqrt{24^2-x^2}}{\sqrt{24-x}}\right)\left(\dfrac{\sin^4(4^{-1}\pi x)}{\cos^3(4^{-1}\pi x)}-\dfrac{7-7\cos^2(4^{-1}\pi x)}{\cos(4^{-1}\pi x)}+6\cos(4^{-1}\pi x)\right)=0$. В лист ответов записать значение наибольшего из корней уравнения.

Решение.

Область допустимых значений определится из условий $\begin{cases} 24^2 - x^2 \geq 0 \\ 24 - x > 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -24 \leq x < 24 \\ x \neq 2 + 8k \end{cases}$.

Выражение в первой скобке равно нулю только при $x = -24$. Приравнивая к нулю выражение во второй скобке и разделив на $\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ имеем $tg^4 \frac{\pi x}{4} - 7tg^2 \frac{\pi x}{4} + 6 = 0$. Решая это уравнение, находим корни:

$\frac{\pi}{4}x_1 = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k \quad \frac{\pi}{4}x_2 = \pm arctg 6 + \pi n \quad \Rightarrow \quad x_1 = \pm 1 + 4k \quad x_2 = \pm\frac{4}{\pi} arctg 6 + 4n$. Учитывая, что $x < 24$, наибольший корень есть $x = 23$.

Ответ: 23.

3.17. Задание. Решить уравнение $6^{(-13-x^2+8x)} + 6^{(19+x^2-8x)} = \frac{432}{81+5x^2-40x}$. В лист ответов записать слово «нет», если уравнение не имеет корней или значение корня, если он единственный, или значение наибольшего из корней, если их несколько.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$6^{3-(x-4)^2} + 6^{3+(x-4)^2} = \frac{2\cdot 6^3}{1+5(x-4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6^{-(x-4)^2} + 6^{(x-4)^2} = \frac{2}{1+5(x-4)^2}$$

Известно, что при $a > 0$ выполняется $a + \frac{1}{a} \geq 2$, причем равенство имеет место только при $a = 1$. Поэтому левая часть уравнения не может быть меньше, чем два и равна двум только при $x = 4$. Правая часть уравнения, очевидно, также равна двум при $x = 4$, а при других значениях x меньше, чем два. Следовательно, $x = 4$ - единственный корень.

Ответ: 4.

3.18. Задание. Два гонщика отправились одновременно от одной точки шоссе, имеющего форму круга в одном направлении. Первый гонщик первый раз догнал второго, делая свой двадцатый круг, в точке, диаметрально противоположной точке старта. Если бы гонщики стартовали одновременно от одной точки шоссе в противоположных направлениях, то их восьмая встреча произошла бы через столько времени, сколько понадобилось бы первому гонщику для преодоления четырех кругов, если бы он делал в час на один круг меньше, чем на самом деле. Сколько кругов в час делает второй гонщик? Записать это значение в лист ответов.

Решение. Пусть x,y – скорости гонщиков в круг/час. В момент догона первым гонщиком второго, первый прошел 19.5 кругов, а второй 18.5 кругов. Отсюда имеем $\frac{19.5}{x} = \frac{18.5}{y}$. В момент восьмой встречи при старте в противоположных направлениях, сумма пройденных расстояний обоими гонщиками равна восьми кругам при скорости сближения x+y. Приравнивая время, необходимое на это сближение времени езды первого гонщика по четырем кругам со скоростью x-1, имеем: $\frac{8}{x+y}=\frac{4}{x-1}$. Решая систему двух уравнений, имеем x=39 y=37.

Ответ: 37.

3.19. Задание. В лист ответов записать наибольшее значение x, удовлетворяющее данному неравенству: $\sqrt{60+225x^2-345x}+\sqrt{420+225x^2-615x}<3\sqrt{-7-25x^2+40x}$

Решение. Область допустимых значений определяется из системы неравенств

$$\begin{cases}60+225x^2-345x\ge 0\\ 420+225x^2-615x\ge 0\\ -7-25x^2+40x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4+15x^2-23x\ge 0\\ 28+15x^2-41x\ge 0\\ -7-25x^2+40x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\left(-\infty;\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{4}{3};\infty\right)\\ x\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{7}{5};\infty\right)\\ x\in\left[\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right]\end{cases}\Rightarrow x=\frac{4}{3}\ \text{или}\ x=\frac{7}{5}$$

То есть имеем всего три допустимых значения. Подставляя эти значения в неравенство убеждаемся, что только при $x=\frac{4}{3}$ оно удовлетворяется.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

3.20. Задание. Дана система. В лист ответов записать максимально возможное значение y из решений системы.

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{27(x^2-1)}{x^2+1}}+\sqrt{\dfrac{18}{x^2+1}}=(y-7)(y-19)+42\\ |y-20|+|y+20|=40\end{cases}$$

Решение. Заметим, что сумма квадратов величин $\sqrt{\frac{(x^2-1)}{x^2+1}}$ и $\sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$ равна единице. Следовательно, можно обозначить $\sqrt{\frac{(x^2-1)}{x^2+1}}=\cos\varphi$ $\sqrt{\frac{2}{x^2+1}}=\sin\varphi$. Тогда левая часть первого уравнения $\sqrt{27}\cos\varphi+3\sin\varphi$ не превосходит значения $\sqrt{27+9}=6$. Но правая часть первого уравнения есть квадратный трехчлен, имеющий минимум при y=13 и равный 6. Следовательно, значение y может быть только y=13. Подставим это значение во второе уравнение и убеждаемся, что оно удовлетворяется. Следовательно, y=13.

Ответ: 13.

3.21. Задание. Периметр некоторого многоугольника равен 158см, причем длины его сторон составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3см. Наибольшая сторона многоугольника равна 44см. В лист ответов записать количество сторон этого многоугольника.

Решение. Пусть n - количество сторон этого многоугольника. Тогда $44-(n-1)3$ длина его наименьшей стороны. Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, можем записать $\left((44-(n-1)3)+\frac{n-1}{2}3\right)n=158$. Решая это квадратное уравнение, имеем: $n=4$ и

$n=\frac{79}{3}$. Но при $n=\frac{79}{3}$ длина $44-(n-1)3$ его наименьшей стороны получается отрицательной, что невозможно.
Ответ: 4.

3.22. Задание. Решить неравенство $\sqrt{\left|\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|-2\right|-2} \le \log_2 x^2+\sqrt{16-\log_2^2 x}$. В лист ответов записать наименьшее значение x, удовлетворяющее этому неравенству.

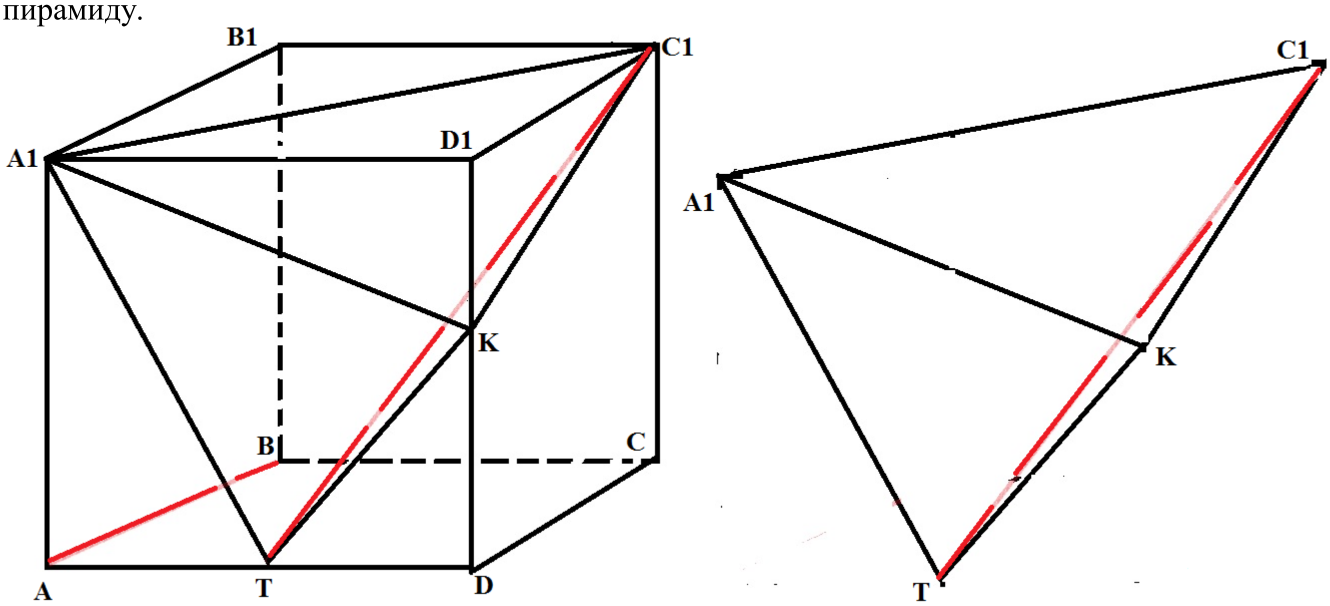
Решение. О.д.з. определится системой $\begin{cases} x>0 \\ \left|\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|-2\right|-2\ge 0 \\ 16-\log_2^2 x\ge 0 \end{cases}$ Решая ее, найдем о.д.з.:

$x\in\left\{\frac{1}{16}\right\}\cup\{1\}\cup\{16\}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x_1=1$ и $x_2=16$ удовлетворяют заданному неравенству, а $x_3=\frac{1}{16}$ - не удовлетворяет.

Ответ: 1.

3.23. Задание. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 12, проведено сечение через диагональ A_1C_1 грани и середину ребра AD. Найдите объем пирамиды, основанием которой является сечение куба, а вершиной – точка K на ребре DD_1 такая, что $DK:DD_1=2:3$. Значение найденного объема запишите в лист ответов.

Решение. На рисунке покажем построение данной пирамиды в кубе и выделенную из куба пирамиду.



Эту пирамиду с основанием A1C1T и вершиной в точке K можно также рассматривать как пирамиду с основанием A1KT и вершиной в точке C1. В этом случае площадь основания находится как разность между площадью грани куба и суммой площадей треугольников AA1T, A1D1K и TKD : $S=12\cdot 12-\left(\frac{12\cdot 6}{2}+\frac{12\cdot 4}{2}+\frac{8\cdot 6}{2}\right)=60$. Высота h в этом случае, очевидно равна длине ребра C1D1, то есть 12. Тогда объем V пирамиды будет $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}60\cdot 12=240$. Ответ 240.